数理解析研究所講究録
第 1787 巻 2012 年 233-242

ロピタルの無限小解析
～接線の問題を中心に～

明治大学付属中野八王子高等学校　西村重人 (Shigeto Nishimura)
Nakano-Hachioji Senior High School Attached to Meiji University

2011.8.25 京都大学数理解析研究所研究集会

1　ロピタル『無限小解析』の成立

ギョーム・フランソワ・アントワーヌ・マルキ・ド・ロピタル (Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital, 1661-1704) はパリに生まれたフランスのアマチュア数学者である．貴族の出で，若い頃は軍人を志したが，視力がよくなかったために数学者を目指すようになった．ロピタルは 1691 年，パリでヨハン・ベルヌーイに出会い，1692 年にかけウーク[*1]にあるロピタルの邸宅に彼を招き，個人的に数学の講義を受けた．その後も書簡を通じてベルヌーイから多くのことを学んだ．ロピタル自身は数学上の大きな業績残した訳ではないが，ベルヌーイから学びとった微分計算の手法を系統的にまとめ，初めての微分計算に関する書物『曲線理解のための無限小解析　第一部　微分計算』を 1696 年に出版した.「第一部」とあるのは「第二部　積分計算」を予定していたためだが，これは実現しなかった．ライプニッツにより創始された微分計算は 1684 年の彼の論文「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法，またそれらのための特別な計算法」[*2]において初めて公となるが，これは 7 ページ程の要約論文で，微分計算の基本となる計算法則を挙げ，微分計算が極値問題や曲線の変曲点を見いだすのに有効な手立てとなることなどが述べられている．ロピタルは微分の定義を明確にした上で，微分の計算法則を証明し，曲線の性質を知るための手法としてさまざまな曲線にこれを適用し，接線の引き方，極値問題の解き方，変曲点・尖点の探し方などを次々に論述して微分計算の有用性を示した．また，現在「ロピタルの定理」の名で知られるベルヌーイの発見も提示した．微分計算の萌芽となったライプニッツの論文が現れてから 12 年，ライプニッツの発見はヨハン・ベルヌーイによって咀嚼され，ベルヌーイのアイディアとともにロピタルに伝えられ，ロピタルの著作により伝播していくこととなったのである．なおロピタルが『無限小解析』の執筆にあたり参照したヨハン・ベルヌーイの講義録は，パウル・シャフハイトリンによりバーゼル大学の書庫にその写しが残されているのが 1922 年に発見され，1924 年に出版された[*3]．

『無限小解析』には 2 つの版があり，それぞれの出版年は 1696 年 (初版)，1716 年 (第 2 版) である．第 2 版は僅かな加筆が見られるが，初版本とほぼ同じである．その後，1768 年に再版され，校訂刊行者による「まえがき」と「解説」が付けられた．1725 年にはヴァリニョンによる解説書『無限小解析の解明』(Eclaircissemens sur L'analyse des infiniment petits) が出版され，この書物が当時よく読まれたことを窺い知ることができる．

『無限小解析』は「まえがき」と 10 の節 (section) からなる．各節の表題は次の通りである．

第 1 節 微分計算の諸規則

[*1] Oucques. 現在のロワール・エ・シェール (Loir-et-Cher) 県の町で県庁所在地ブロア (Blois) の北 27km にある．
[*2] Gottfried Wilhelm Leibniz "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus." 訳文は文献 [8] による．
[*3] Paul Schafheitlin "Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92", Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft,Nr.211,Akademische Verlagsgesellschaft(1924).

第 2 節　あらゆる種類の曲線の接線を見いだすために微分計算を用いること

第 3 節　最長向軸線と最短向軸線を見いだすために微分計算を用いること．極大と極小の問題はそこに帰着される

第 4 節　変曲点および尖点を見いだすために微分計算を用いること

第 5 節　縮閉線を見いだすために微分計算を用いること

第 6 節　反射による焦線を見いだすために微分計算を用いること

第 7 節　屈折による焦線を見いだすために微分計算を用いること

第 8 節　位置が与えられた無数の直線または曲線に接する曲線の諸点を見いだすために微分計算を用いること

第 9 節　以上の方法によるいくつかの問題の解法

第 10 節　幾何曲線に微分計算を役立てる新方法．そこからデカルトとフッデの方法を導く

本稿では第 1 節と第 2 節を取り上げる．この部分は前掲のライプニッツの論文の微分計算と接線を求める方法のいわば詳説というべきもので，ライプニッツの論文では曖昧さが残されていた微分の定義を明確にし，その基本的な計算法則に証明を与えた．さらに曲線の接線の問題へと進み，ライプニッツの論文で取り上げられているサイクロイドや，その他のさまざまな曲線を例に挙げ，その方法を詳細に述べている．これらについて原文を追って見ていきたい．

2　ライプニッツの論文

ライプニッツの論文「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法，またそれらのための特別な計算法」では dx などは有限の線分として扱われているが，それは無限小としての意味を含んでいる．ライプニッツはそこから導出したいわゆる微分の計算法則を証明せずに列挙している．文献 [8](p.296〜312) からそれらの箇所を要約すると

> a を与えられた定量とすると，da は 0 に等しい．
>
> 加法と減法．$d\overline{z-y+w+x}$ は $dz-dy+dw+dx$ に等しい．
>
> 乗法．$d\overline{xv}$ は $xdv+vdx$ に等しい．
>
> 除法．$d\frac{v}{y}$ は $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ に等しい．
>
> 冪．$dx^{a} = ax^{a-1}dx$.
>
> 乗根．d, $\sqrt[b]{x^{a}} = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$.

また曲線の接線を引くためのライプニッツの方法は超越曲線にも適用され，接線を引くこととは，曲線と同値な無限個の角を持つ多角形の 1 辺を引くことであると見さえすれば，今まで接線を引くことができなかった分数式や無理式で表示される曲線，そしてサイクロイドのような曲線でさえ，接線を引くことができると力説するのである．

ロピタルはライプニッツが論文の中で述べた以上の事柄を詳しく説明している．

3 微分の定義と計算法則の証明

第 1 節「微分計算の諸規則」では変化量およびライプニッツの論文でははっきりしなかった微分の定義を明瞭に提示することから始められる.

定義 I

連続的に増加あるいは減少する諸量を**変化**量と呼び，それに対して，他の諸量が変化する間も，同じまま留まる諸量を**定**量と呼ぶ．したがって，放物線において，パラメータは定量であるが，向軸線と切除線は変化量である.

ここで向軸線とは appliquées の訳語で縦線のこと，切除線とは coupées の訳語で横線のことである．これら二つの訳語は文献 [4] に倣った.

次に「微分 (différence)」の定義が提示される．もともと différence とは「差」を意味する語である．ライプニッツの論文では differentia であり，そこでは dx などは有限線分として扱われているので「微分」という意味合いにはならない[*4]．しかし，ロピタルではこの語 différence を無限小の変化量という意味にも用いているので，ここでは「微分」と訳すのが適切であろうと思う．ただし本来の「差」という意味でも同じ語を用いるので，いつも「微分」と訳すわけにはいかない．この語には両方の意味が混在しているのである．後に出版されたヴァリニョンの『無限小解析の解明』には,「ここに定義された différence はすなわち différentielle である」と書かれているので，今日の différentielle という語は 1696 年から 1725 年の間に定着したと考えられる.

定義 II

ある変化量が連続的に増加あるいは減少する無限小部分はこの量の**微分**と呼ばれる．たとえば，線 AC を軸すなわち径にもち，向軸線の一つとして線分 PM をもつ任意の曲線 AMB があるとしよう (図 1).

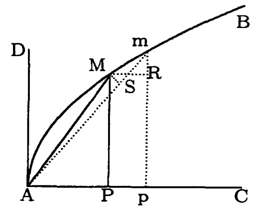

図 1

そして，この向軸線に限りなく近いもう一つの向軸線 pm があるとしよう．その上で，AC に平行な MR と，弦 AM，Am を引き，A を中心として半径 AM の小円弧 MS を描けば，Pp は AP の微分，Rm は PM の微分，Sm は AM の微分，Mm は弧 AM の微分である．同じように，弧 Mm を底辺とする小三角形 MAm は部分 AM の微分，小領域 MPpm は線分 AP，PM と弧 AM に囲まれた領域の微分である.

系

第 1 条. 定量の微分は無し，すなわちゼロであること，あるいは (同じことだが) 定量は微分をもたないことは明白である.

注意

[*4] この点については文献 [8] に詳しい解説がある.

> **今後，ただ一つの文字で表される変化量の微分を表示するために印，すなわち指標 d を用いる．混乱を避けるために，今後印 d はこの計算以外には使用しない．たとえば，変化量 AP を x，PM を y，AM を z，弧 AM を u，直線と曲線に囲まれた領域 APM を s，部分 AM を t と名づければ，dx は Pp の値，dy は Rm の値，dz は Sm の値，du は小さな弧 Mm の値，ds は小領域 MPpm の値，dt は直線と曲線に囲まれた小三角形 MAm の値を表す．**

前掲のライプニッツの論文では dx の意味に一貫性を欠いているが[*5]，ロピタルは dx を量の無限小変化量として捉えられている．

しかし，曲線の性質を考察するにはそれだけでは十分ではない．無限小量と曲線の扱い方を定めておかなければならない．そこで論考を進めるために次に挙げる二つの「要請あるいは仮定」が大変重要となるのである．

> **I. 要請あるいは仮定**
> 第 2 条．限りなく小さな量だけしか違わない二つの量は互いに差別せずに採ってよいことを要請する．すなわち (同じことだが)，ある量がそれよりも限りなく小さな量だけ増加あるいは減少するなら，この量は同じところに留まっているものと見なしてよい．たとえば，AP に対して Ap，PM に対して pm，領域 APM に対して領域 Apm，小長方形 MPpR に対して小領域 MPpm，小三角形 AMS に対して小部分 AMm，角 PAM に対して角 pAm，等々を採ってよいことを要請する．

> **II. 要請あるいは仮定**
> 第 3 条．曲線はそれぞれが無限小の無数の線分を繋いだものと見なしてよいことを要請する．すなわち (同じことだが) 各々が無限小の無数の辺をもつ多角形と見なしてよく，これらの辺が隣り合って作る角により線の曲率が定まる．たとえば，曲線の部分 Mm と円弧 MS はそれらが限りなく小さいことにより直線と見なされる．したがって小三角形 mSM は直線図形と見なしてよい．

> **注意**
> **今後一般に，アルファベットの終わりの方の文字 $z, y, x, \cdots$ は変化量を表し，それに対して最初の方の文字 $a, b, c, \cdots$ は定量を表すとする．したがって，x が $x + dx$ となるとき，$y, z, \cdots$ は $y + dy, z + dz, \cdots$ となる[*6]．そして，$a, b, c, \cdots$ は同じ $a, b, c, \cdots$ のままとなる．**

二番目の要請に見られるような曲線の捉え方はライプニッツの論文にも見られ，ロピタルはそれを踏襲している．以上二つの「定義」と二つの「要請あるいは仮定」を最初に示すことにより，後に続く論考がたいへんスムーズに展開されていくのである．ロピタル自身「まえがき」の最後につぎのように述べ，二つの「要請あるいは仮定」を設定したことに有無を言わせぬ構えを見せている．

> さらに，本論考の冒頭で示した論考を支える二つだけの要請あるいは仮定は非常に明白であると私には思える．これらの要請が注意深い読者の心に何らかの疑いを残しうるとは思えない．

ライプニッツが結果だけを挙げた微分の計算法則については，すでに定義 II の系 (第 1 条) で定量の微分が 0 となることを挙げているが，残りについても次のように厳密に証明を与えた．

> **命題 I　問題**
> 第 4 条．**一度に加えられたいくつかの量の微分や，一方から他方を引いた量の微分をとれ．**
> 　$a + x + y - z$ があるとして，その微分をとらなければならないとしよう．x が無限小部分だけ増加するとしよう．すなわち，x が $x + dx$ になるとしよう．このとき，y は $y + dy$，z は $z + dz$

[*5] 文献 [8]p.311 参照．
[*6] [原註] 第 1 条．

となるが，定量 a については同じ a のままとなる[*7]．したがって，提示された量 $a+x+y-z$ は $a+x+dx+y+dy-z-dz$ となる．その微分は，後者から前者を差し引いて見いだされ，$dx+dy-dz$ となる．その他の場合についても同様だが，このことはつぎの規則を与える．

規則 I　加えられた量，減じられた量についての規則．
提示された量の各項の微分をとり，符号をそのまま残しておけば，そこから，求める微分となる新たな量が作られる．

命題 II　問題
第 5 条．**いくつかの量を互いに乗じて作られる積の微分をとれ．**

1°．xy の微分は $ydx+xdy$ である．なぜなら，x が $x+dx$ となるとき，y は $y+dy$ となり，したがってこのとき，xy は $x+dx$ と $y+dy$ の積 $xy+ydx+xdy+dxdy$ になるからである．その微分は $ydx+xdy+dxdy$ だが，結局 $ydx+xdy$ となる[*8]．というのは $dxdy$ は他の項 ydx，xdy と比べると無限小量となるからだが，その理由は，たとえば ydx と $dxdy$ を dx で割れば，一方では y が見いだされ，他方ではその微分，それゆえ y よりも限りなく小さい dy が見いだされるからである．以上のことから，二つの量の積の微分は，一番目の量の微分と二番目の量との積と，二番目の量の微分と一番目の量との積を加えたものになることがわかる．

2°．xyz の微分は $yzdx+xzdy+xydz$ である．なぜなら，積 xy をただ一つの量と見なして，上に示したように，微分 $ydx+xdy$ と二番目の量 z との積 (これは $yzdx+xzdy$ を与える) と，二番目の量 z の微分 dz と最初の量 xy との積 (これは $xydz$ を与える) を加えなければならないからである．したがって，xyz の微分は $yzdx+xzdy+xydz$ となる．

3°．$xyzu$ の微分は $uyzdx+uxzdy+uxydz+xyzdu$ である．これは積 xyz をただ一つの量と見なせば前の場合と同じように示される．無数にあるその他の場合についても同様で，そこからつぎの規則が作られる．

規則 II　乗じられた諸量についての規則．
互いに乗じられたいくつかの量の積の微分は，これらの量の各々の微分とその他の量の積との積の総和に等しい．

したがって，ax の微分は $x0+adx$，すなわち adx である．$(a+x)\times(b-y)$ の微分は $bdx-ydx-ady-xdy$ である．

命題 III　問題
第 6 条．**任意の分数の微分をとること．**

$\dfrac{x}{y}$ の微分は $\dfrac{ydx-xdy}{yy}$ である．その理由を述べる．$\dfrac{x}{y}=z$ とすると，$x=yz$ となり，これら二つの変化量 x と yz はつねに互いに等しくなければならないので，これらの量が増加あるいは減少すれば，それらの微分，すなわち，それらの増加量または減少量もまた互いに等しいということになる．したがって，$dx=ydz+zdy$ となるから[*9]，

$$dz=\frac{dx-zdy}{y},\quad z\text{ にその値 }\frac{x}{y}\text{ を置けば，}\quad =\frac{ydx-xdy}{yy}$$

となる．これが必要なことであった．そこからつぎの規則が作られる．

[*7] [原註] 第 1 条．
[*8] [原註] 第 2 条．
[*9] [原註] 第 5 条．

規則 III　割られた量，すなわち分数についての規則.

任意の分数の微分は，分子の微分と分母の積から分母の微分と分子の積を差し引いて，その全体を分母の平方で割ったものに等しい.

したがって，$\frac{a}{x}$ の微分は $\frac{-adx}{xx}$，$\frac{x}{a+x}$ の微分は $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$ である.

命題 IV　問題

第 7 条. **一つの変化量の任意の完全冪または任意の不完全冪の微分をとれ.**

完全冪と不完全冪[*10]に用いる一般的規則を与えるために，それらの冪指数の間に認められる類似性を説明しておく必要がある.

（ … 中略 … ）

つぎのことは至極当然だが，異なる二つの場合が生じうる.

第一の場合は，冪が完全なとき，すなわち，その冪指数が整数のときである．xx の微分は $2xdx$，x^3 の微分は $3xxdx$，x^4 の微分は $4x^3dx$，…である．なぜなら，x の平方は x と x の積に他ならないので，その微分は $xdx+xdx$，すなわち $2xdx$ となるからである[*11]．同様に，x の立方は x と x と x の積に他ならないので，その微分は $xxdx+xxdx+xxdx$，すなわち $3xxdx$ である[*12]．無数にあるその他の冪についても同じであるから，m が望むような整数を表すとすれば，x^m の微分は $mx^{m-1}dx$ となる.

冪指数が負ならば，x^{-m} の微分，すなわち $\frac{1}{x^m}$ の微分は

$$\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}dx$$

となることが見いだされる.

二番目の場合は，冪が不完全なとき，すなわち，その冪指数が小数部分をもつ数であるときである．$\sqrt[n]{x^m}$，すなわち $x^{\frac{m}{n}}$ $\left(\frac{m}{n}\text{は小数部分をもつ任意の数を表す}\right)$ の微分をとることを提示しよう．$x^{\frac{m}{n}}=z$ とし，各辺を n 乗すれば，$x^m=z^n$ となる．第一場合で説明したようにして微分をとれば，$mx^{m-1}dx=nz^{n-1}dz$ が見いだされるので，

$$dz=\frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$$

nz^{n-1} のところにその値 $nx^{m-\frac{m}{n}}$ を置けば，

$$=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx,\quad \text{すなわち，}\quad \frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$$

が見いだされる．冪指数が負ならば，$x^{-\frac{m}{n}}$ の微分，すなわち $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ の微分は，

$$\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}}=-\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$$

となる.

以上のことはつぎの一般的規則を与える.

規則 IV　完全冪または不完全冪についての規則.

変化量の任意の完全冪または任意の不完全冪の微分は，この冪の冪指数と，1 だけ少ない冪指数で累乗されたこの変化量との積に，この変化量の微分を乗じたものに等しい.

[*10][訳註] 冪指数が整数の冪を完全冪，そうでない有理数の冪を不完全冪という.
[*11][原註] 第 5 条.
[*12][原註] 第 5 条.

したがって，m は正でも負でも望むような整数または小数部分をもつ数を表すとし，x は任意の変化量を表すとすれば，x^m の微分はつねに $mx^{m-1}dx$ となる．

定義 II の系および規則 I〜規則 IV によりライプニッツが挙げた五つの計算法則の証明が完了したことになる．再度まとめると，

$$\begin{aligned}
&da = 0 \quad (a \text{ は定量}) \\
&d(x \pm y) = dx \pm dy \\
&d(xy) = ydx + xdy \\
&d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{yy} \\
&d\left(x^m\right) = mx^{m-1}dx \quad (m \text{ は有理数})
\end{aligned}$$

となる．

4　曲線に接線を引く方法

第 2 節「あらゆる種類の曲線の接線を見いだすために微分計算を用いること」では第 1 節で定めた微分の計算法則をもとに曲線の接線を具体的に求める方法が詳細に論じられる．

定義
曲線を作る多角形[*13]の小さな辺の一つ Mm を延長するとき，このように延長されたこの小さな辺は点 M または点 m における**接線**と呼ばれる (図 2).

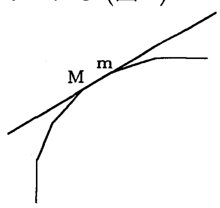

図 2

この接線の定義はライプニッツのものとまったく同じである．そうして微分を用いて接線影を求める方法を次のように定める．

命題 I　問題
第 9 条. **切除線 AP と向軸線 PM の関係が何らかの方程式で表されるような曲線 AM があるとして，この曲線上の与えられた点 M から接線 MT を引かなければならないとしよう** (図 3).

向軸線 MP を引き，点 T で径と交わる直線 MT が求める接線であるとするとき，最初の向軸線に限りなく近いもう一つの向軸線 mp と AP に平行な短い線分 MR を考える．そして，与えられた線分 AP を x，PM を y と名づけると (それゆえ，Pp すなわち MR$=dx$，Rm$=dy$)，相似な三角形 mRM と MPT は

$$\mathrm{mR}(dy).\mathrm{RM}(dx) :: \mathrm{MP}(y).\mathrm{PT} = \frac{ydx}{dy}$$

を与える[*14]．さて，与えられた方程式の微分をとる方法によって，いずれも dy のついた諸項により dx の値が見いだされる．この値に y を掛け dy で割ると，接線影 PT の値が微分を含まないまったく既知の諸項によって与えられる．この値が求める接線 MT を引くのに役立つ．

[*13][原註] 第 3 条.

[*14][訳註] 今日風に書けば，mR : RM $=$ MP : PT ゆえ，PT $= \dfrac{ydx}{dy}$.

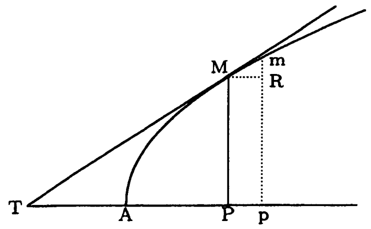

図 3

この命題が接線を引く一般的方法である．PT $= \frac{ydx}{dy}$ は既知の諸項から見いだされ，曲線の径の上にこのようにして得られた点 T をとり，点 M と点 T を結べばそれで接線が引けるという訳である．以下，さまざまな曲線の接線を求める方法が提示されるが，ここではライプニッツも取り上げたサイクロイドの接線を引く過程を見ることにする．まず最初に楕円に接線を引く．

例 II

第 12 条.

$$\mathrm{AP} \times \mathrm{PB}(x \times (a-x)).\overline{\mathrm{PM}}^2(yy) :: \mathrm{AB}(a).\mathrm{AD}(b)$$

となるような曲線 AMB があるとしよう[*15]．それゆえ

$$\frac{ayy}{b} = ax - xx$$

で，微分をとれば，

$$\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx.$$

そこから，

$$\mathrm{PT}\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayy}{ab-2bx},$$

$\frac{ayy}{b}$ にその値 $ax - xx$ を置くことにより，

$$= \frac{2ax-2xx}{a-2x}$$

が導かれる．よって，

$$\mathrm{PT} - \mathrm{AP}\ \text{すなわち}\ \mathrm{AT} = \frac{ax}{a-2x}.$$

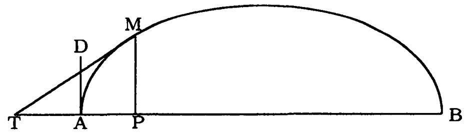

図 5

（ … 以下略 … ）

[*15][訳註] 点 A を座標平面の原点として，今日の楕円の方程式の形で書くと， $\dfrac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)^2} = 1$ となる．

このようにして，楕円の接線の引き方が提示される．したがって，円の接線も引くことができる訳だが，それに基づいてサイクロイドの接線を引くのである．

命題 II　問題

第 15 条. **前の命題において，切除線 AP は接線 PT の引き方がわかっている曲線の一部分であるとしよう．そして，曲線 AM 上に与えられた点 M から接線 MT を引かなければならないとしよう**(図 7).

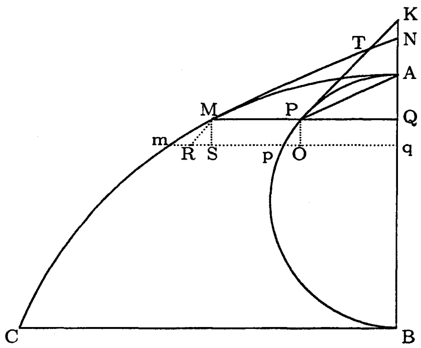

図 7

向軸線 MP と接線 PT を引き，T でこの接線と交わる線分 MT が求める接線であるとしよう．最初の向軸線に限りなく近いもう一つの向軸線 mp と，PT に平行な短い線分 MR を思い描き，与えられた切除線 AP を x，PM を y と名づける．前と同じように，Pp または $\mathrm{MR} = dx$，$\mathrm{Rm} = dy$ となる．相似な三角形 mRM と MPT は

$$\mathrm{mR}(dy).\mathrm{RM}(dx) :: \mathrm{MP}(y).\mathrm{PT} = \frac{ydx}{dy}$$

を与える．その次に，前の諸例に見たように，そして次の諸例にも見るようにして，切除線 AP(x) と向軸線 PM(y) の関係を表す方程式によって残りを完成する．

この命題により，接線の引き方がわかっている曲線があれば，その曲線を軸とする新たな曲線にも接線が引けることが判明する．

例 II

第 17 条. $x = \dfrac{ay}{b}$ としよう．その微分は $dx = \dfrac{ady}{b}$ である．$\mathrm{PT}\left(\dfrac{ydx}{dy}\right) = \dfrac{ay}{b} = x$ となる．曲線 APB は半円，Q まで延長された向軸線 MP は直径 AB に垂直であるとすると，曲線 AMC は半輪転曲線すなわちサイクロイドで，$b = a$ のとき単純サイクロイド，b の方が大きいとき延伸サイクロイド，b の方が小さいとき短縮サイクロイドである．

このように，円周 APB を軸として，切除線 AP(x) と向軸線 MP(y) の関係が $x = y$ であるとき，曲線 AMP はサイクロイドで，点 P における円の接線上に $\mathrm{PT} = x$ となるように点 T をとると，MT がサイクロイドの点 M における接線となる．さらにこれでサイクロイドの接線の引き方がわかったのであるから，今度はサイクロイドを軸と見て曲線を描き，切除線と向軸線の関係式が与えられたなら，命題 II によりこの新しい曲線の接線も引くことができるのである．

以上に見たように，ロピタルはライプニッツの論文の中核部分を系統的かつ明瞭に述べ，豊富な適用例を示して微分計算の有用性を広く一般に広めた．その意味でロピタルは解析学の発展に大きく寄与したといえるのである．

参考文献

[1] 佐々木力『数学史』(岩波書店, 2010)

[2] 高瀬正仁『dx と dy の解析学』(日本評論社, 2000)

[3] 高瀬正仁「マルキ・ド・ロピタルの微分計算」,『数学史の研究』(京都大学数理解析研究所講究録 1444, 2005) 所収, 116-123 頁

[4] 高瀬正仁『無限解析のはじまり』ちくま学芸文庫 (筑摩書房, 2009)

[5] 中村幸四郎『近世数学の歴史』(日本評論社, 1980)

[6] 林知宏「17-18 世紀における無限小をめぐる論争：ライプニッツを中心に」,『数学の思考』(『現代思想 2000 年 10 月増刊号』)(青土社, 2000) 所収, 14-37 頁

[7] 林知宏『ライプニッツ』(東京大学出版会, 2003)

[8] 原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳『ライプニッツ著作集 2』(工作舎, 1997)

[9] Julian Lowell Coolidge *The Mathematics of Great Amateurs*, 2nd edition (Oxford University Press,1990)